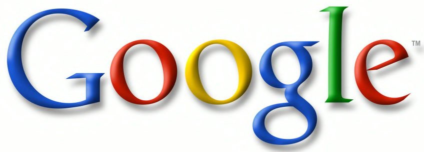


HANDELING

OVER DE

VAN EVENWIGT,

DOOR

[redacted] DE HARTOG,

[redacted] *Wiskunde, Zeevaart- en Sterrekunde, aan*
[redacted]*henaeum Illustre der Stad Amsterdam.*



TE AMSTELDAM, BY
CHANGUION
EN
DEN HENGST.
MDCCCIII.

VERHANDELING

OVER DE

LYN VAN EVENWIGT,

DOOR

H. DE HARTOG,

Lector in de Wiskunde, Zeevaart- en Sterrekunde, aan het Athenaeum Illustre der Stad Amsterdam.



TE AMSTELDAM, BY

J. CHANGUION

EN

P. DEN HENGST.

MDCCCIII.

VERHANDELING

OVER DE

LYN VAN EVENWIGT.

§. 1. De Lyn van Evenwigt, inzonderheid met toepasfing op de Ophaalbruggen, is reeds voorlang door verfcheiden voornaame Wiskonstenaaren, als *de Marquis de l'Hospital*, *Jan* en *Jacob Bernoelli*, *Bellidor*, *Simfon*, *Wolf*, en meer anderen, behandeld geworden. Zie *Acte Erudit. A°.* 1695 *pag.* 56, 60 en 66, als mede *Bellidor Science des Ingenieurs*, *Simfon Fluxions Problema* 23, *Wolf Elementa Mecanica Problema* 57, en andere; en is vervolgens nog onlangs door Profesfor *Calkoen* te Leyden, in een Verhandeling, ten dien einde, aan de Bataaffche Maatfchappy der Weetenfchappen, te Haarlem, ingeleverd, op nieuw berekend, en in een haarer Werken, in 1802 uitgekomen, geplaatst geworden. Ik zelve heb reeds voor zeventien Jaaren een Verhandeling alleen met opzigt tot de Ophaalbruggen, in het Vierde Deel, eerfte Stuk, van het Utrechtfche Genootfchap van Kunften en Weetenfchappen, betrekkelyk dit onderwerp gegeven, en had my voorbehouden om den een' of anderen tyd daarover een uitvoeriger

ontwikkeling mede te deelen; dan hiervan tot nu toe niets geworden zynde, kwam my onlangs een der bovengemelde Verhandelingen onder het oog, welke my dit onderwerp op nieuw in gedagten bragt, en by nadere overweging kwam het my voor, dat, hoe uitvoerig en geleerd men ook tot hier toe over dit ſtuk gedagt en geſchreeven mogt hebben, men echter hetzelve nog niet tot die eenvoudigheid gebragt hadde waarvoor het vatbaar zoude zyn: hierop nadenkende, en het ſtuk uit een geheel nieuw gezichtpunt beſchouwende, kwam ik terſtond tot deze allereenvoudigſte, en voor de Practyk allervruchtbaarſte oploſſing, welke ik niet kan nalaaten den liefhebberen der Wiskunde mede te deelen, in verwagting, dat nu een grooter aantal van dezelve deze zaak zullen kunnen inzien, en dus het gebruik en de toepaſſing daarvan, op alle mogelyke wyze, helpen bevorderen.

§. 2. Laat dan CZE en BIV twee kromme Lynen zyn, waarvan AD de gemeene as verbeeld, en op welke kromme Lynen de gewigten *P* en *Q* door middel van de ketting of touw ZAI lopende over de ſchyf A, in evenwigt gehouden worden, men vraagt, indien een dezer Lynen, by voorbeeld, CZE gegeven is, om de andere BIV te vinden?

Om deze vraag op te losſen, trekke men uit *Z* en I de perpendiculairen *ZF* en IG voords HI parallel aan AD

En

En noemt AB = a
AC = b
AD = c
de lengte der ketting ZAI = e

insgelyks AF = t
FZ = v de Coordinaaten van de kromme Lyn CZE
AG = HI = x
GI = AH = y de Coordinaaten van de andere kromme Lyn BIV.

Vervolgens zy AZ = q en AI = p.

Zo is $q + p = e$.

Nu trekke men nog hi parallel en oneindig naby HI, en beschryve met Ii als radius het Cirkel LMi, die het gewigt P zal verbeelden.

Laat wyders TW de tangens van het punt I zyn, op welke men de perpendiculair LI laat vallen; voords HI verlengt hebbende tot in M, GI tot in K en AI tot in R, trekt men de perpendiculairen LN en LR; eindelyk beschryft men met AI als radius de boog IS, die om deszelfs kleinheid voor een regte Lyn zal kunnen gehouden worden.

En men zal hebben Si = dp en KI = dx; maar dewyl van de driehoeken IKi en ILN beide de hoe

ken K en N regt, de hoeken K*Ii* en LIN gelyk zyn, om dat de ∠ N*Ii* hun beide tot een regten maakt, en nog daar en boven de ſchuine Lyn *Ii* van den eenen, gelyk de ſchuine Lyn IL van den anderen is, zo moeten beide deze driehoeken in het geheel gelyk zyn; dus LN = *i*K en bygevolg is ook LN = *dx*.

Insgelyks dewyl de driehoeken *Ii*S en ILR beide regthoekig zyn, de ∠ S*Ii* van den eenen gelyk de ∠ LIR van den anderen zy, om dat de ∠ R*Ii* hun insgelyks beide regt maakt, en daarenboven *Ii* = IL is, moeten ook deze driehoeken gelyk en dus LR = S*i* zyn, gevolglyk is ook LR = *dp*.

Dit vooraf gezegd hebbende, ziet men terſtond dat RLN als een gebogen hefboom kan aangemerkt worden, wiens ſteunpunt men zig verbeelden kan in L te zyn, en aan wiens eenen arm in N de last regthoekig werkt, nademaal ieder punt, welke men van de Lyn IM onderſteund, het geheele gewigt *P* tegenhoud, terwyl aan den anderen arm in R de magt insgelyks onder een regten hoek volgens de Lyn AR uit A trekt; zo men dan deze magt *M* noemt, zal men hebben

$$M \times \mathrm{LR} = P \times \mathrm{LN}$$

$$\text{dat is } M \times dp = P \times dx$$

$$\text{dus} \quad M = \frac{Pdx}{dp}$$

Maar om dezelve reden, zal ook aan den anderen

kant

kant om het gewigt Q uit A te houden de magt zyn

$$M = \frac{Qdt}{dq}$$

Derhalven heeft men $\frac{Pdx}{dp} = \frac{Qdt}{dq}$ om dat deze twee magten met elkander evenwigt moeten maaken.

$$\text{Maar } \underline{p + q = e}$$
$$\text{dus } q = e - p$$
$$\text{en } dq = - dp$$

$$\text{Ergo } \frac{Pdx}{dp} = \frac{Qdt}{-dp}$$

dat is $Pdx = -Qdt$ En integrerende

$Px = A - Qt$ Zynde A een Conſtante grootheid.

Zo men nu n en m voor twee onbepaalde, doch echter conſtante grootheden aanneemt, en ſtelt dat in het geval als $x = n$ is, $t = m$ zy. Om de denkbeelden te vestigen, kan men ſtellen dat dit gebeurd als het gewigt P op het hoogſte en Q op het laagſte gekomen is.

$$\text{Zo is } Pn = A - Qm$$
$$\text{dus } Pn + Qm = A$$

Ergo bekomt men $Px = Pn + Qm - Qt$ voor de algemeene aequatie op de Evenwigts-Lyn, waaruit ter-

ftond volgt $t = \frac{Pn - Px + Qm}{Q} = (n-x)\frac{P}{Q} + m$

kortheids halven ftel ik $\frac{P}{Q} = r$ zo is $t = (n-x)\,r + m$ $= nr - rx + m$.

§. 3. Wanneer men nu de kromme Lyn CZE bekent heeft, en dus de aequatie op dezelve gegeven is, dat is y in een functie van t is uitgedrukt, zo kan men ook $q = \sqrt{t^2 + y^2}$ in een functie van t vinden, maar p is gelyk $e - q$, dus heeft men dan ook p in een functie van t; doch zo even vonden wy $t = nr - rx + m$ dat is t in een functie van x, derhalven bekomt men ook p in een functie van x, en dewyl $y = \sqrt{p^2 - x^2}$ is, heeft men dan ook y in een functie van x, dat is de aequatie op de kromme Lyn BIV gevonden, dat te doen was.

Men zal uit het foort van letteren zig in het vervolg gemakkelyk kunnen herinneren, dat a, b, c gegevene grootheden zyn, n en m twee conftanten door de integratie ingekomen, en r de reden uitdrukt die het gewigt P tot Q heeft.

§. 4. Ik zal na de algemeene eigenfchappen dezer kromme Lyn geen onderzoek doen, dewyl dit toch van te weinig nuttigheid, en voor myn Lezers, welke zig niet opzettelyk op de theorie der kromme Lynen hebben toegelegd, te vreemd zoude zyn.

Lie-

Liever zal ik het gebruik van deze algemeene aequatie door een voorbeeld tragten op te helderen, en ten dien einde veronderstellen dat EZC een gedeelte van een Cirkel verbeeld, zo dat ED = DC zy, en men zal uit de eigenschap van het Cirkel hebben $\overline{FZ}^2 = (2\,CD - CF) \times CF$.

$$\text{Nu is } \overline{FZ}^2 = y^2,\ 2\,CD = 2c - 2b \text{ en } CF = t - b$$
$$\text{dus } y^2 = (2c - t - b) \times (t - b)$$
$$\text{dat is } y^2 = 2ct - t^2 - 2bt + b^2$$
$$t^2 = t^2$$

$$\text{dus } y^2 + t^2 = q^2 = 2ct - 2bc + b^2$$
$$\text{en } q = \sqrt{2ct - 2bc + bb}$$
$$\text{maar } t = nr - rx + m \text{ zo even gevonden}$$
$$\text{dus } q = \sqrt{2cnr - 2crx + 2cm - 2bc + bb}$$
$$\text{of } e - p = \sqrt{2cnr - 2crx + 2cm - 2bc + bb}$$
$$\text{dus } p = e - \sqrt{2cnr - 2crx + 2cm - 2bc + bb}$$
$$\text{ergo } p^2 = (e - \sqrt{2cnr - 2crx + 2cm - 2bc + bb})^2$$
$$x^2 = x^2$$

$$\text{dus } p^2 - x^2 = y^2 = (e - \sqrt{2cnr - 2crx + 2cm - 2bc + bb})^2 - x^2$$

$$\text{en } y = \sqrt{[(e - \sqrt{2cnr - 2crx + 2cm - 2bc + bb})^2 - x^2]}$$

het welke de aequatie op de kromme Lyn BIV is, als de andere EZC een Cirkel zy.

§. 5. Dewyl y onder het dubbeld wortelteeken ſtaat, heeft dezelve vier waardyen; uit het eerſte teeken volgen er terſtond twee, namenlyk een poſitive en een negative, om dat de wortel zo wel negatief als poſitief kan genomen worden; de poſitive waardy van y valt aan de regter, en de negative aan de ſlinkerhand van den as, en uit het tweede teeken volgt nog dat ieder dezer waardyen wederom tweeledig is na dat de $\sqrt{2cnr - 2crx + 2cm - 2bc + bb}$ poſitief of negatief genomen word; doch dewyl deze wortel de waarde van q is, zo blykt dat zo lang q poſitief is ook deze wortel poſitief, en q negatief zynde ook deze wortel negatief moet genomen worden, dus dat er in geen geval eenige dubbelzinnigheid kan plaats hebben.

§. 6. Als $x = a$ is moet $y = 0$ zyn.

Derh. $(e - \sqrt{2cnr - 2acr + 2cm - 2bc + bb})^2 - a^2 = 0$

dus $e - \sqrt{2cnr - 2acr + 2cm - 2bc + bb} = a.$

Ergo $e = a + \sqrt{2cnr - 2acr + 2cm - 2bc + bb}$

waardoor de lengte der ketting bepaald word, of liever waardoor men een aequatie bekomt die het verband aanwyst dat er tusſchen de Conſtante letteren gevonden word.

§. 7. Maar dewyl $e = a + \sqrt{2cnr - 2acr + 2cm - 2bc + bb}$ is

Zo is ook $e - a = \sqrt{2cnr - 2acr + 2cm - 2bc + bb}$

dus $(e - a)^2 = 2cnr - 2acr + 2cm - 2bc + bb$

of $(e - a)^2 + 2acr = 2cnr + 2cm - 2bc + bb$ en hierdoor word

$$y = \sqrt{[(e - \sqrt{(e-a)^2 + 2acr - 2crx})^2 - x^2]}$$

of $y = \sqrt{[(e - \sqrt{(e-a)^2 - (x-a)2cr})^2 - x^2]}$

Men ziet derhalven dat de letters n, m en b, welke van ons goedvinden afhingen, uit de waarde van y verdwenen zyn, hetwelk aantoond dat men in het vervolg niets meer met dezelve te doen heeft, maar dat men in deszelfs plaats alleenlyk de lengte der ketting e naar believen kan neemen.

§. 8. Het wegvallen van de letter b uit de waarde van y vordert ondertusſchen alle onzen aandagt, dewyl hier uit volgt dat de grootheid van deze letter geen den minſten invloed op den aart en natuur der kromme Lyn BIV heeft, en dus dat het in het beſchryven van dezelve volſtrekt geen verſchil maakt of het Cirkel, waarin het gewigt Q zig beweegt, groot of klein zy, nademaal de radius van dit Cirkel $c - b$ zy.

§. 9. Hier uit volgt nog verder, dat, zo men de lengte der ketting e niet veranderd, de waarde van y ook niet zal veranderen, en by gevolg dat niet alleen de kromme Lyn BIV van dezelve natuur zal bly-

blyven, hoedanig ook de letter b veranderen moge, maar daarenboven in alle gevallen volstrekt aan zig zelve gelyk zal zyn, dus dat de kromme Lyn BIV niet zal veranderen, hoe groot of hoe klein het Cirkel CZE, in welke het gewigt Q zig beweegt, ook moge genomen worden, mids men de lengte der ketting e maar dezelve laat blyven.

§. 10. Verder kan de uitdrukking $(e-a)^2-(x-a)2cr$ welke onder het wortelteeken in de waarde van y gevonden word, niet negatief zyn, want anders ware y imaginair; deze uitdrukking kan derhalven niet kleinder dan nul worden; doch men ziet ligt dat als dit gebeurd dat alsdan x op zyn grootste moet zyn, want x is negatief en alleen maar veranderlyk, dus alleen maar voor vergrooting of verkleining vatbaar, gevolglyk hoe grooter x word, hoe kleinder deze uitdrukking moet worden, derhalven x op zyn grootste zynde, moet deze uitdrukking op zyn kleinste, dat is nul zyn; wil men dan de grootste waarde van x hebben men

stelle $(e-a)^2-(x-a)2cr=0$

dat is $(e-a)^2-2crx+2acr=0$ waar uit volgt

$$2crx=2acr+(e-a)^2$$

$2cr$ ———

dus $x=a+\frac{(e-a)^2}{2cr}$ en dit is de grootste waarde die x hebben kan.

Men

Men ziet ligt dat men de grootfte waarde van x hebbende, terftond weeten kan hoe hoog of hoe laag het benedenfte punt V der kromme Lyn BIV boven of beneden de horizontaale Lyn OU moet daalen om evenwigt te kunnen maaken, want men behoeft hiertoe alleen maar het verfchil tusfchen deze grootfte waarde van x en de grootheid c te neemen.

§. 11. Wyders hebben wy boven gezien, dat de magt M, om het gewigt Q uit A te houden, in het algemeen ware $M = \frac{Qdt}{dq}$ en in ons tegenwoordig geval is $q^2 = 2ct - 2bc + bb$

dus $qdq = cdt$

en $\frac{q}{c} = \frac{dt}{dq}$

Dus de magt $M = \frac{qQ}{c}$ waaruit volgt dat de magt, die vereischt word om het gewigt Q uit A te houden, altyd evenredig is aan het ftuk q der ketting, hetwelk tusfchen de fchyf in A en het gewigt Q bevat is, en wel om deze reden dat Q en c beide Conftante grootheden zyn.

§. 12. Hier uit volgt verder nog deze merkwaardige eigenfchap, namenlyk, dat als het gewigt Q in C gekomen is, en aldaar op het bovenfte des Cirkels even als op een horizontaale lyn of vlak rust, de

magt

magt M echter, om hetzelve uit A in dezen ſtand te houden, niet gelyk nul is, maar evenredig aan $q = AC$ zyn moet. Dit ſchynt in den eerſten opſlag een paradox, en behoort onder die ſoort van waarheden, welke men buiten de hooge Wiskunde niet ligt ontdekt, doch die echter van geen minder nut voor den Werktuigkundigen, als treffende voor den Wiskunſtenaar zyn.

§. 13. Al verder als $x = a$ is moet ook $p = a$ zyn, en gevolglyk $q = e - a$

de magt $M = \frac{qQ}{c}$ wordt dan veranderd

in, $M = \frac{e-a}{c} \times Q$ en het is met deze magt M dat het gewigt P aan den anderen kant evenwigt moet maaken, doch P is thans in B en werkt aldaar volgens de rigting der zwaarte regtſtandig op de ſchyf in A; het gewigt P kan dus niet kleinder dan deze uitdrukking $\frac{e-a}{c} \times Q$ zyn, want een van beide, of dit gewigt P word in B onderſteund of niet; in het eerſte geval blykt het van zelve dat het grooter zoude moeten zyn, dus in het laatſte noodzaaklyk daar aan gelyk. $\frac{e-a}{c} \times Q$ is dan het kleinſte gewigt dat P hebben kan, doch dan zal het zelve in B gekomen zynde, van de kromme Lyn BIV in het geheel niet

on-

onderſteund worden, de kromme Lyn zal by gevolg aldaar den as AD moeten raaken. Grooter zal men het gewigt *P* kunnen neemen zo veel men wil, doch dan zal hetzelve, in B gekomen zynde, reeds door de kromme Lyn moeten onderſteund worden, en de kromme zal den as ſnyden.

§. 14. Wyders, nademaal men gezien heeft dat de magt *M* om het gewigt *Q* uit *A* te houden, in reden der lengte van de Lyn' *q* afneemt, zo moet ook aan den anderen kant, als men den eenen arm *dp* der hefboom conſtant neemt, den anderen arm *dx* in dezelve reden van *q* verminderen, en dewyl *dx* gelyk de differentie van $x =$ HI is, zo volgt dat de kromme BIV hoe langer hoe meer na AH moet toebuigen, en dus met zyn holle zyde na dezelve gekeerd zyn. Doch dit ſlechts in het voorbygaan, dewyl een ſtrenger onderzoek hier van, over het geheele beloop der kromme Lyn zoude moeten uitgeſtrekt worden, welk onderzoek my te ver van myn oogmerk zoude verwyderen, en voor myne Lezers van te weinig nuttigheid zyn.

§. 15. Zo men vervolgens de Lyn DZ trekt, en beſchouwe dezelve als een balk of parallelepipedum, overal van gelyke zwaarte, bewegende om het punt D, door middel van de ketting die aan deszelfs andere einde in *Z* vast is, zo zal het halve gewigt van deze

deze balk in de plaats van Q kunnen genomen worden; want als de balk horizontaal is, rust de eene helft in D, terwyl de andere helft in E door de ketting word opgehouden, en dit moet het zelve zyn, als of dit gewigt ware, en de balk zelve geen zwaarte hadde, maar echter ſtevig genoeg was om dit gewigt in het opgaan te kunnen tegenhouden, en den Cirkel te doen beſchryven; ondertusſchen is dit geval van de Balk juist ook dat van een Ophaalbrug: zo men derhalven een dusdanige Ophaalbrug maaken wil, heeft men niet anders te doen, dan de voorgaande Formulen ſlechts tot zyn oogmerk te wyzigen, dat uit aanmerking van het aantal van letteren, welke nog aan ons goedvinden worden overgelaaten, op zeer veel manieren zal kunnen geſchieden. Het ſpreekt van zelve, dat ofſchoon ik altyd maar van een lyn en een gewigt ſpreek, men in de Practyk echter twee gewigten en vier lynen moet hebben; de gewigten zullen dus ieder maar half zo zwaar zyn, en ieder derzelven zal tusſchen en over twee van deze lynen (die dan van yzer gemaakt en ſterk genoeg moeten zyn) heen moeten loopen.

§. 16. Om de toepasſing van het voorgaande op de Ophaalbruggen, des te gemakkelyker te maaken, zal ik er de volgende algemeene beſchryving nog by voegen.

Vooreerst: wanneer men den afſtand van A tot E

dat

dat is AE $=f$ ſtelt, zo is $a+f$ de kortſte lengte die de ketting e hebben kan; doch om dezelve zo lang als men wil te kunnen nemen, ſtelle ik $e=a+f+g$ zo is g de overmaat welke de ketting boven deszelfs noodzaaklyke lengte heeft, en dan

is $y=\sqrt{[(a+f+g-\sqrt{(f+g)^2-(x-a)2cr})^2-x^2]}$

$a+\frac{(f+g)^2}{2cr}$ de grootſte waarde van x

en $\frac{f+g}{c}\times Q$ het kleinſte gewigt van P.

Dit is de algemeenſte beſchryving van een Ophaalbrug die men hebben kan; want als deze Brug geheel neer is, legt het gewigt P nog op eenigen afſtand van den ſtyl op de kromme Lyn; de kromme Lyn zelve komt niet tot boven aan den ſtyl, maar blyft op eenigen afſtand onder de ſchyf A; en als de Brug geheel op is, komt het bovenſte van dezelve ook niet tot boven aan den ſtyl, maar blyft insgelyks op eenigen afſtand onder A, ten zy $f=\sqrt{2c^2}$ genomen word.

Ten tweeden: wanneer men $g=0$ ſtelt,

zo is $y=\sqrt{[(a+f-\sqrt{f^2-(x-a)2cr})^2-x^2]}$

$a+\frac{f^2}{2cr}$ is de grootſte waarde van x

en $\frac{f}{c}\times Q$ het kleinſte gewigt van P.

Zo men hebben wil dat de kromme Lyn BIV met deszelfs uiteinde of laagste punt V op de Brug neer komt, zo moet $a + \frac{f^2}{2cr} = c$ genomen worden.

Dus $a = c - \frac{f^2}{2cr}$ weshalven men de grootheid a hier na bepaalen kan.

Deze Brug is minder algemeen, want de lengte der ketting is hier op zyn kleinste bepaalt; doch voor het overige is alles even eens als in de voorgaande, de kromme Lyn komt niet tot boven aan de schyf, gelyk ook niet de Brug als die geheel op is, of f moet gelyk $\sqrt{2c^2}$ genomen worden.

Ten derden: zo men eindelyk ook nog $a = 0$ stelt,

$$\text{is } y = \sqrt{[(f - \sqrt{f^2 - 2crx})^2 - x^2]}$$

$$\frac{f^2}{2cr} \text{ de grootste waarde van } x$$

$$\text{en } \frac{f}{c} \times Q \text{ het kleinste gewigt van } P.$$

Dit is de allereenvoudigste Brug die men maaken kan, want alles is hier op zyn naauwste bepaald, terwyl niet alleen de ketting zyn kleinste lengten heeft, maar ook tevens de kromme Lyn tot boven aan de schyf in A komt.

§. 17. Zo men in dit laatste geval voor P deszelfs

zelfs kleinste gewigt, namentlyk $\frac{f}{c} \times Q$ neemt, en $f = \sqrt{2c^2} = l$ stelt, zo is $2c^2 = l^2$ en $4c^2 = 2l^2$ dus $2c = l\sqrt{2}$

en $\frac{f}{c} \times Q = \frac{\sqrt{2c^2}}{c} \times Q = Q\sqrt{2}$

dus $r = \frac{P}{Q} = \frac{Q\sqrt{2}}{Q} = \sqrt{2}$

Ergo $y = \sqrt{[(l - \sqrt{l^2 - 2lx})^2 - x^2]}$

$\frac{l^2}{2cr} = \frac{1}{2}l$ de grootste waarde van x.

en $P = Q\sqrt{2}$

En dit is het zelfde geval, waarover ik eertyds in eene Verhandeling, aan het Utrechtsche Genootschap ingeleverd, boven aangehaald, geschreven heb, en waaraan ik, wat de zaak zelve betreft, alsnog geene verbetering weet toe te brengen: aangezien dit, zoo als men gezien heeft, van alle mogelyke gevallen, de kleinste ketting en gewigt vordert, en dus aan de minste wryving onderworpen is.

§. 18. Dat dit laatste geval dezelve kromme Lyn daarstelt, welke ik in de zo even genoemde Verhandeling gegeven heb, zal ik nog kortelyk aanwyzen.

Alhier is $y^2 = (l - \sqrt{l^2 - 2lx})^2 - x^2$

dus $x^2 + y^2 = p^2 = (l - \sqrt{l^2 - 2lx})^2$

of $p = l - \sqrt{l^2 - 2lx}$

$$\text{Ergo } l - p = \sqrt{l^2 - 2lx}$$

$$\text{en } l^2 - 2lp + p^2 = l^2 - 2lx$$

$$\text{of } 2lx = 2lp - p^2$$

dat is $x = \frac{p}{2l}(2l - p)$ de waarde van de eerste Coordinaat

$$\text{dus } x^2 = \frac{p^2}{4l^2}(4l^2 - 4lp + p^2)$$

$$p^2 = \frac{p^2}{4l^2}(4l^2)$$

$$\text{Ergo } p^2 - x^2 = y^2 = \frac{p^2}{4l^2}(4lp - p^2)$$

dus $y = \frac{p}{2l}\sqrt{(4lp - p^2)}$ de waarde van de andere Coordinaat

hetwelk onder andere letteren, dezelve waardyen zyn, welke ik in gemelde Verhandeling voor de Coordinaaten der Ophaalbrug gegeven heb.

§. 19. Ook heb ik aldaar een allergemakkelykst middel aan de hand' gegeven, door welke, zelve ieder gewoon timmerman, deze kromme Lynen meetkundig kan beschryven, hetgeen, wel is waar, door de boven gegevene vergelykingen insgelyks kan geschieden, doch niet zonder berekening, en dus met

veel

meer moeite, weshalven myne lezers, welke een dergelyke Brug in practyk willen brengen, zig daar van zoude kunnen bedienen. Ik heb daar tevens een middel voorgesteld, door welke men in geval van regen als anderfints, waardoor de Brug verzwaard word, het evenwigt ten minsten eenigermaate kan herstellen, door slegts het gewigt *P*, dat men by een nieuwe en drooge Brug nog op eenigen afstand van de schyf op de kromme Lynen plaatst, by vogtig weder hooger op te haalen, waardoor het dan op een minder hellend vlak rustende, meerder kragt moet oefenen, en dus het evenwigt tragten te herstellen; dit middel is allereenvoudigst, en kan, zo als ik aldaar getoond heb, met weinig moeite aangewend worden.

Men kan eene dergelyke herstelling van het evenwigt, offchoon met meerder omflag, nog op eene andere wyze te weeg brengen, door namenlyk by het zwaarder of ligter worden der Brug, de uiterste einden der kromme Lynen te laaten ryzen of daalen, terwyl zy in A vast blyvende, om dit punt bewegen, hierdoor moeten deze kromme Lynen meerder of minder helling bekomen, en dus de gewigten minder of meerder doen werken; ik heb my, in de reeds meermaalen genoemde Verhandeling, ook van dit middel bediend, om de gewigten minder te doen trekken.

§. 20. Dan beide deze middelen, offchoon in de Practyk eenigermaate voldoende, kunnen echter het evenwigt niet volkomen herftellen: wat het eerfte betreft, ik heb dit reeds in gemelde Verhandeling doen gevoelen; om er verder van overtuigd te zyn, laat ADO een Quadrant van een cirkel zyn en DO de Ophaalbrug verbeelden, voords AIV de kromme Lyn zyn, over welke het gewigt *P* moet afrollen, om evenwigt te maaken, in voegen dat *P* in V zy als de Brug geheel op is, dog nog niet in A als dezelve geheel neer zy, maar op eenigen afftand beneden A op de kromme Lyn rusten, en laat aldaar volkoomen evenwigt plaats hebben, zo zal dit evenwigt, als de Brug zwaarder word, terftond verbroken worden, en men zal 't gewigt *P* hooger moeten ophaalen, om dit evenwigt te herftellen, laat nu het zelve tot in *A* zyn opgehaald, als de Brug op zyn allerzwaarst en geheel neer is, zo zal by het opgaan der Brug het gewigt *P* wel moeten afdaalen, doch geheel op zynde, nog niet in *V* kunnen gekomen zyn, maar zig hooger, ergens, op de kromme Lyn moeten bevinden, alwaar het alsdan op geen horizontaal vlak rustende, nog eenige kragt moet oefenen, en dus met de Brug in geen evenwigt kan zyn, dewyl dezelve geheel op zynde geen kragt behoeft om in dezen ftand gehouden te worden, en men bemerkt gemakkelyk, dat dit even min op eenig ander punt, behalven alleen

het

het eerste, kan plaats hebben: om zig hiervan op eene algemeene wyze te overtuigen, is niet anders nodig, dan zig de aequatie voor te stellen, naar welke de kromme Lyn beschreven is; en deze aequatie bekomt men uit het eerste algemeen geval van §. 16. zo men aldaar $a = o$ stelt, en $f = \sqrt{2c^2} = l$ neemt. Als mede $P = Q\sqrt{2}$ want dan heeft men

$$y = \sqrt{[(l + g - \sqrt{(l + g)^2 - 2lx})^2 - x^2]}$$

in welke g de overmaat uitdrukt welke de ketting boven deszelfs noodzakelyke lengten heeft zo men nu door het ophaalen of neerlaaten van het gewigt de ketting verkort of verlangt, zo maakt men van g, die standvastig genomen ware, een veranderlyke grootheid, en hierdoor zoude, zo men het evenwigt wilde blyven behouden, ook y, en gevolglyk ook de kromme Lyn AIV zelve moeten veranderen, dat niet gebeurd; weshalven ook het evenwigt geen stand kan houden, maar moet zelf op de minste verandering van g gestoord worden; en wat het laatste middel om het evenwigt te herstellen aangaat, men behoeft zig uit het voorgaande maar te herinneren, dat, als de Brug geheel op is, alsdan het gewigt P niets behoeft te trekken, en dus op een horizontaal vlak moet leggen, en by gevolg dat het uiterste der kromme Lynen horizontaal moet zyn; maar nu valt het van zelve in het oog, dat, zo men deze kromme Lynen aan de einden laat daalen, deze

uiterste punten, veel minder eenig ander punt van dezelve, horizontaal kunnen blyven, en dus de kragt van het gewigt, als de Brug geheel op is, niet vernietigen kunnen. Men kan niet tegenwerpen dat boven getoond is, dat als de Brug geheel op zy, de kragt nog niet gelyk nul, maar evenredig aan een Lyn *q* moet zyn, dewyl in ons tegenwoordig geval *q* zelve nul is.

Wil men echter een algemeen bewys, men herinnere zig dat nu het punt B in A valt, en de kromme Lyn door AIV word afgebeeld; gestelt nu dat de Brug zwaarder word, en dus dat *Q* verandert in *bQ*, zo moet de magt om dezelve te houden, ook overal *b* maal grooter zyn, derhalven moet, aan den anderen kant, den arm *dx*, der hefboom, ook overal *bdx* worden; nademaal *dp* en *P* Constante grootheden gesteld zyn, en men zal moeten onderzoeken, of dit door het doen daalen van het punt I der kromme Lyn zal kunnen geschieden, dat is door de Lyn AIV om het punt A als middelpunt te doen bewegen of ronddraaijen.

Het is vooreerst zeker, dat door deze beweging of ronddraaijing, de hoek van trekking AIT niet veranderd, om dat de tangens TI tevens mede ronddraaid, maar wel de hoek van helling TIG, invoege dat als hierdoor de hoek IAG de waarde van α graaden kleinder word, de hoek van helling TIG $= \phi$ de waarde van α graaden zal vergrooten, men ziet ligt dat dit op alle punten der kromme Lyn even eens

zal

zal moeten gebeuren, dewyl door deze ronddraaijing ieder punt derzelve een boog van evenveel graaden moet doorloopen, dus dat α een Conſtante grootheid zal moeten zyn.

Laat nu de kromme Lyn AI $=z$ 'en dus $Ii = dz$ zyn, zo zal men in den regthoekigen driehoek IKi, om dat de hoek GIT $=$ KI$i = \varphi$ is, deze evenredigheid hebben:

$1 : dz = Sin.\ \varphi : dx = Sin.\ \varphi\ dz$ namenlyk voor dat de kromme Lyn is rondgedraaid.

en $1 : dz = Sin.\ (\varphi + \alpha) : bdx = Sin.\ (\varphi + \alpha)\ dz$ na dat dezelve is rondgedraaid.

$$\text{waaruit volgt } \frac{bdx}{dx} = \frac{Sin.(\varphi+\alpha)\ dz}{Sin.\ \varphi\ dz}$$

$$\text{dat is } b = \frac{Sin.(\varphi+\alpha)}{Sin.\varphi}$$

$$\text{of } b = \frac{Sin.\ \varphi\ Cof.\ \alpha + Cof.\ \varphi\ Sin.\ \alpha}{Sin\ \varphi}$$

$$\text{of } b = Cof.\ \alpha + \frac{Cof.\ \varphi\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ \varphi}$$

$$\text{derhalven } b = Cof.\ \alpha + Sin.\ \alpha\ Cot.\ \varphi$$

De letter b kan dus niet Conſtant zyn, om dat φ zulks niet is; want men ziet ligtelyk, dat φ op alle punten der kromme Lyn een verſchillende waarde

 moet

moet hebben; dewyl dan *b* niet Conſtant kan zyn, kan dezelve *dx* ook niet overal gelykelyk vergrooten, en dus kan de neerlaating of ronddraaijing der kromme Lyn, het evenwigt ook niet anders dan ſlechts in een punt herſtellen.

§. 21. Men begrypt ondertusſchen gemakkelyk, hoe noodzaaklyk het zy, om dit evenwigt volkomen te kunnen herſtellen, terwyl, buiten dat, dit ſoort van Ophaalbruggen zeer onvolkomen zoude zyn, gemerkt den verſchillenden graad van zwaarte, waaraan zy op den duur onderworpen zyn. Ik oordeel derhalven geen ondienst te zullen doen, zo ik hierby tevens een gemakkelyk middel aan de hand geef, waardoor men dit evenwigt, ten allen tyde, volmaakt kan herſtellen, en zie hier de weg, welke men ten dien einde moet inſlaan.

Laat wederom DO de Ophaalbrug zyn, welke in lengte gelyk AD is, en AIV de kromme Lyn, voor deze Brug beſchreven, rustende met deszelfs uiteinde V op de kleine ſtyl VU, alwaar dezelve horizontaal is, zo zal, als de Brug geheel neer is, het gewigt *P* in A zyn, en geheel op, zal P in V zyn.

Stel nu, dat de Brug door regen, of iets dergelyks, zyn grootſte zwaarte verkregen heeft, en neem de helft van deze zwaarte voor het gewigt *Q*, dit door de $\sqrt{2}$ gemultipliceerd zal het gewigt *P* geeven,

ven, dat men gebruiken moet, en men zal hebben $P = Q\sqrt{2}$, en de Brug zal in dezen ſtaat overal met het gewigt *P* in evenwigt zyn; doch zodra de Brug drooger en dus ligter word, zal dit evenwigt ophouden, vermits het gewigt *P* alsdan te zwaar is; om nu dit evenwigt te herſtellen, verſchuive men de ketting die in O vast is, na den kant van E toe, hierdoor zal het gewigt *P* op de kromme Lyn moeten afdaalen, en dus minder trekken, terwyl ter gelyker tyd de magt, om de Brug uit A te houden, grooter zal zyn, want dezelve moet nu meer dan de halve Brug ophouden: men ziet ligt, dat zo wel het eene als het andere medewerkt, om het evenwigt des te ſpoediger te herſtellen, en dat gevolglyk deze twee omſtandigheden, te ſamen genomen, niet alleen maaken, dat het evenwigt des te eerder herſteld word, maar ook tevens, dat hierdoor aan een grooter verſchil van zwaarte, welke de Brug ondergaan kan, evenwigt kan geboden worden.

Stel nu, dat men met het verſchuiven der ketting tot in E gekomen is, en aldaar evenwigt verkregen heeft, zo zal het punt E, als de Brug opgaat, het Kwart Cirkel EZC beſchryven, en geheel op zynde, zal dit punt E in C zyn; de ketting zal derhalven op de lengten AC na zyn doorgeloopen, het gewigt *P* zal dus nog niet aan het eind der kromme Lyn gekomen zyn, maar zal nog eenige kragt moeten

oefe-

oefenen, die evenredig aan deze Lyn AC is, maar deze zelve kragt word er juist ook vereischt, om de Brug in dezen ſtand op te houden, (men zie §. 11 en 12.) gevolgelyk zal het evenwigt alsnog moeten ſtand grypen. Doch dewyl dit betoog ſtrikt genomen niets meer bewyst, dan dat het evenwigt in deze twee punten, namentlyk als de Brug geheel op en geheel neer is, plaats heeft, offſchoon daaruit niet onduidlyk ſchynt te volgen, dat zulks dan ook op alle tusſchen inleggende punten, eveneens zal moeten gebeuren, zal ik zulks echter nog kortelyk Wiskundig doen zien; en hiertoe is niet anders nodig, dan ſlechts een vlugtig oog te ſlaan op hetgeen §. 9. gezegd is, terwyl hieruit volgt, dat door het verſchuiven der ketting het evenwigt in eens, op alle punten der kromme Lyn, te gelyk herſteld word; want in dat punt der Brug, alwaar de ketting vast is, kan men ſtellen het gewigt *Q* geplaatst te zyn, men doet dan door het verſchuiven der ketting niets anders, dan dit gewigt *Q* van plaats te veranderen, en hierdoor te noodzaaken, om, by het op- of neergaan der Brug, een grooter of kleinder Cirkel te beſchryven, terwyl intusſchen de lengte der ketting *e*, volkomen onverandert blyft, en dit laatſte was juist de eenige Conditie, welke wy in de aangehaalde §. gezien hebben dat vereischt wierd, om altyd dezelve kromme lyn te behouden en evenwigt te hebben.

§. 22.

§. 22. Om te vinden hoeveel de ketting by het ligter worden der Brug verschoven moet worden, of liever hoeveel dezelve als dan nog van het punt D verwydert moet zyn, om het eevenwigt te herstellen, veronderstel ik dat het gewigt der halve Brug, dat eerst Q ware, nu ligter geworde zynde, in R is veranderd, en men zal eerst moeten onderzoeken, hoeveel hier van, nu in E regthoekig zal moeten tegengehouden worden, laat dit G zyn en men zal hebben $G \times DE = R \times DO$

$$\text{dus } G = \frac{R \times DO}{DE}$$

Derhalven zal de magt, om dit gewigt uit A, door middel van de Lyn DE te houden,

$$\text{zyn } M = \frac{R \times DO}{DE} \times \frac{q}{c} \quad \text{Zie §. 11.}$$

Maar het gewigt P nu reeds iets afgedaald zynde, trekt nu ook maar met de magt $M = Q \times \frac{q}{c}$

$$\text{Derhalven moet } Q \times \frac{q}{c} = \frac{R \times DO}{DE} \times \frac{q}{c} \text{ zyn}$$

$$\text{dat is } Q \times DE = R \times DO$$

$$\text{of } Q : R = DO : DE$$

Dat is het gewigt der Brug als dezelve op zyn zwaarste is, staat tot derzelver gewigt als zy ligter is geworden-

worden, gelyk den afſtand die het uiteinde der ketting, in het eerſte geval van D heeft, tot den afſtand, welke het uiteinde der ketting in het laatſte geval van D moet hebben.

§. 23. Men kan de zwaarte van *Q* en *R*, door middel van een ſoort van onſter, voor aan de Brug geſlagen, ligt vinden, en men ziet, dat men voor het overige, niet anders dan een enkelen Regel van Driën behoeft te gebruiken, om het andere te berekenen.

§. 24. Het verſchuiven van de ketting zoude in den eerſten opſlag moeielyk kunnen ſchynen, doch men behoord dit te doen als de Brug geheel op is, wanneer de gewigten op een horizontaal vlak, of ten minſten nagenoeg horizontaal vlak rustende, ſlechs maar behoeven omgerold te worden, om de verſchuiving te kunnen bewerkſtelligen, het welke niet moeilyk kan zyn, dit zyn ondertusſchen zaaken die men doen kan zo men wil, en welke ik daarom aan het oordeel en vernuft van den werkman veilig kan overlaaten.

§. 25. Dewyl ik dan alhier, gelyk ik vertrouwe, de geheele theorie der Ophaalbruggen, zo algemeen, en voor een ieders bevatting zo duidelyk gegeven heb, en tevens de zwaarigheden, welke men met grond daar tegens zoude kunnen inbrengen, uit den weg geruimd

ruimd heb, zo hoop ik, dat de Wis- en Werktuigkundigen, wel zullen willen medewerken, om deze Bruggen, onder hun opzigt, eindelyk eens in Practyk te helpen brengen, dewyl hier door niet alleen veel ongelukken, welke door de gewoone Wipbruggen niet zelden gebeuren, zouden worden voorgekomen, maar ook tevens, op den duur veel kosten zouden doen uitwinnen, behalven nog, dat zulks tot een aanmerkelyk cieraad, voor ieder Stad of Dorp, alwaar dezelve gevonden worden, zouden verſtrekkken.

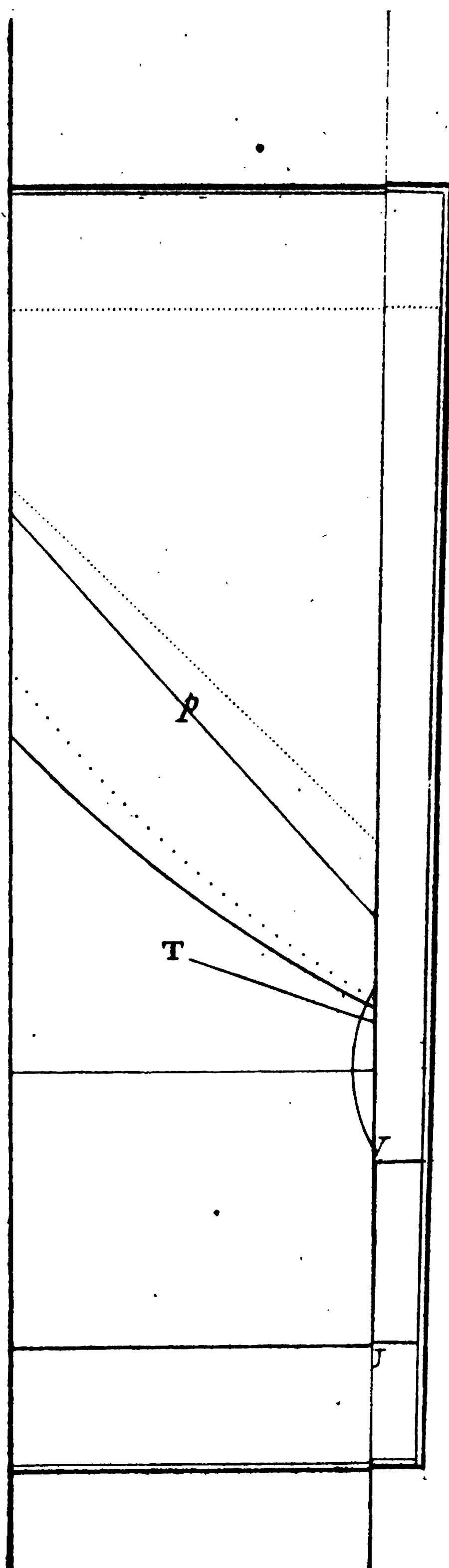
§. 26. Ik heb in myn bovengemelde Verhandeling, aan het Utrechtſche Genoodſchap ingeleverd, nog een ander ſoort van Ophaalbruggen beſchreven, welke insgelyks op dit algemeen beginzel rusten, dat de magt om dezelve op te haalen, altyd evenredig is, aan het ſtuk der ketting, welke tusſchen de ſchyf en de Ophaalbrug gevonden word, en ik vertrouw dat derzelver leezing voor een ieder Natuur- en Werktuigkundige niet onnut of onaangenaam kan zyn. Ondertusſchen is dit ſoort van Ophaalbruggen voor het algemeen gebruik niet geſchikt, maar zoude, myns oordeels, op een buitengoed, alwaar men een dergelyke Brug moest hebben, met ſmaak kunnen aangelegd worden.

§. 27. Eer ik hier van afſtap, moet ik er nog dit byvoegen, dat myn oogmerk met het ſchryven dezer Verhandeling, niet alleen geweest is, om een

groo-

grooter aantal van Wis- en Werktuigkundigen, door de duidelykste ontwikkeling der Evenwigtslyn, een aangenaam veld van bespiegelingen te openen, en tevens hierdoor het stuk der Ophaalbruggen tot zyn grootste eenvoudigheid te brengen, maar ook te gelyker tyd om door dit voorbeeld te doen zien, hoe gemakkelyk het is, om de gevonden algemeen aequatie der Evenwigtslyn, op ieder voorkomend geval, te kunnen toepassen, want even als ik hier de geheele theorie der Ophaalbruggen, uit dezelve heb afgeleid, kan men ook in ieder ander geval, alwaar het slegts aankomt, om een zekere last, langs een gegeven lyn of vlak, te bewegen, te werk gaan, en dus de lyn vinden, over welke een tegenwigt zoude moeten aflopen, om overal met die last in evenwigt te zyn, en ik twyfel niet of er zyn in de natuur dergelyke gevallen voorhanden, in welke men daarvan, met vrugt gebruik zoude kunnen maaken.




p
T